

二次根式的化简（加油站）

一、二次根式有理化

1. 把下列各式分母有理化： $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

【解析】 $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

【标注】【知识点】分母、分子有理化

2. 若 $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 求 $\frac{1}{2}a^3 - a^2 - a + 2$ 的值 .

【答案】 2 .

【解析】 由 $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 得 $a = \sqrt{3} + 1$, 即 $a - 1 = \sqrt{3}$,
两边平方 , 得 $a^2 - 2a - 2 = 0$,
 $\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}a(a^2 - 2a - 2) + 2 = 2$.

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【能力】运算能力

3. 已知： $a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ ， $b = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ ，求： $\sqrt{a^2 + 4ab + b^2}$ 的值。

【答案】 $3\sqrt{22}$.

【解析】 $\because a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$,
 $b = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

$$\therefore a + b = 14, ab = 1 .$$

$$\therefore a^2 + 4ab + b^2 = (a + b)^2 + 2ab = 14^2 + 2 \times 1 = 198 .$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + 4ab + b^2} = \sqrt{198} = 3\sqrt{22} .$$

【标注】【知识点】整式乘除化简求值-条件化简求值

4. 把下列各式分母有理化 .

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

(2) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

(3) $\frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{7} + 2}$.

【答案】(1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.

$$(3) \frac{11-4\sqrt{7}}{3}.$$

【解析】(1)

(2)

$$(3) \frac{(\sqrt{7}-2)^2}{3} = \frac{11-4\sqrt{7}}{3}.$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

5. 计算： $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

【答案】 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

【解析】 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

6. 分母有理化： $\frac{1}{\sqrt{10}-4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{\sqrt{10}+4}{6}$

【解析】 $\frac{1}{\sqrt{10}-4} = \frac{\sqrt{10}+4}{(\sqrt{10}-4)(\sqrt{10}+4)} = -\frac{\sqrt{10}+4}{6},$
故答案为： $-\frac{\sqrt{10}+4}{6}.$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

7. 将 $\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$ 分母有理化的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{5}}{10} (x=5) \\ \frac{3\sqrt{x}-3\sqrt{5}}{x-5} (x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 5) \end{cases}$$

【解析】 $\because x \geq 0$,

$$\therefore \text{(i) 当 } x=5 \text{ 时, 原式} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10};$$

$$\text{(ii) 当 } x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 5 \text{ 时, 原式} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{5})}{x-5} = \frac{3\sqrt{x}-3\sqrt{5}}{x-5},$$

$$\text{综上: } \frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{3\sqrt{5}}{10} (x=5) \\ \frac{3\sqrt{x}-3\sqrt{5}}{x-5} (x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 5) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

8. 分母有理化: $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = (\quad).$

A. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{2\sqrt{2}-2+\sqrt{6}}{4}$

【答案】C

【解析】
$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{1 \times [(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{[(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}][(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分母、分子有理化

9. 计算: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}} = (\quad).$

A. $\sqrt{2013}-1$

B. $1-\sqrt{2013}$

C. $\frac{\sqrt{2013}-1}{2}$

D. $\frac{1-\sqrt{2013}}{2}$

【答案】A

【解析】
$$\begin{aligned} &= \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} + \cdots + \frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2013}}{(\sqrt{2012}+\sqrt{2013})(\sqrt{2012}-\sqrt{2013})} \\ &= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2013}-\sqrt{2012} \\ &= \sqrt{2013}-1. \end{aligned}$$

故选A.

【标注】【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】最简二次根式

10. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$.

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \cdots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}. \end{aligned}$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【知识点】最简二次根式

二、复合二次根式化简

11. 已知 $a + \frac{1}{a} = 4 (0 < a < 1)$, 求 $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ 及 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$ 的值.

【答案】 $\sqrt{6}$ 、 $-\sqrt{2}$

【解析】 $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = a + \frac{1}{a} + 2 = 6, \because \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} > 0 \therefore \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{6}$
 $\because 0 < a < 1 \therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} < 0$
 又 $\because \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = a + \frac{1}{a} - 2 = 4$
 $\therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\sqrt{2}.$

【标注】【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

12. 已知 $x + \frac{1}{x-1} = 7$, 则 $\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的值是 _____.

【答案】 ± 2

【解析】 $\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2 = x-1 + \frac{1}{x-1} - 2 = x + \frac{1}{x-1} - 3,$
 $\because x + \frac{1}{x-1} = 7,$
 $\therefore \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2 = 7 - 3 = 4,$
 $\therefore \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \pm 2.$
 故答案： ± 2 .

【标注】【知识点】二次根式的化简求值——利用完全平方

13. 若 $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{6}, 0 < x < 1$, 求:
 (1) $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 14$ 的值.
 (2) $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}$ 的值.

【答案】 (1) $2\sqrt{7}.$
 (2) $-\sqrt{2}.$

【解析】(1) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = (\sqrt{6})^2,$

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 6,$$

$$x + \frac{1}{x} = 4,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 16,$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 16,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14,$$

$$\text{原式} = \sqrt{14 + 14}$$

$$= 2\sqrt{7}.$$

(2) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$

$$= x - 2 + \frac{1}{x}$$

$$= 2,$$

$$\because 0 < x < 1,$$

$$\therefore \text{原式} = -\sqrt{2}.$$

【标注】【思想】整体思想

【能力】运算能力

【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

【知识点】二次根式的加减以及混合运算

14. 化简： $\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$

【标注】【知识点】多重二次根式

【能力】运算能力

15. 化简： $\sqrt{4 - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$

【标注】【知识点】多重二次根式

【能力】运算能力

16. 化简 $\sqrt{\sqrt{48} - \sqrt{45}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{10} - \sqrt{6})}{2}$.

【解析】 原式 $= \sqrt{\sqrt{3}(4 - \sqrt{15})}$
 $= \sqrt[4]{3} \times \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}}$
 $= \frac{\sqrt[4]{3} \times \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$
 $= \frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt{10} - \sqrt{6})}{2}$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】多重二次根式

17. 计算： $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$.

【答案】 1.

【解析】 略

【标注】【知识点】多重二次根式

【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

【能力】运算能力

18. 计算： $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

【答案】 $2 - \sqrt{2}$.

【解析】原式 = $\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}$$
$$= 2 - \sqrt{2} .$$

故答案为： $2 - \sqrt{2}$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】分母、分子有理化

【知识点】二次根式的四则混合运算

【知识点】多重二次根式

19. 化简以下各式 .

(1) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

(2) $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}}$.

(3) $\sqrt{10 + 8\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

【答案】 (1) $1 + \sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{2} + 4$.

【解析】 (1) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{10 + 8\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{10 + 8 \times (\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 4$.

【标注】【知识点】多重二次根式

【能力】运算能力

20. 化简 :

(1) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

(2) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

(3) $\sqrt{16 - 2\sqrt{15}}$.

(4) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

(5) $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$.

(6) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

(7) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

【答案】 (1) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{2} + 1$.

(3) $\sqrt{15} - 1$.

(4) $2 + \sqrt{3}$.

$$(5) 4 - \sqrt{3}.$$

$$(6) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$(7) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

【解析】(1) 略.

(2) 略.

(3) 略.

$$(4) \text{原式} = \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$(5) \text{原式} = \sqrt{19 - 2\sqrt{48}} = \sqrt{16} - \sqrt{3} = 4 - \sqrt{3}.$$

$$(6) \text{原式} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$(7) \text{原式} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】二次根式的加减以及混合运算

【知识点】多重二次根式